Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. m,n,p,q,r sont des entiers naturels.

On note $\delta_{i,j}=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}$ (symbole de Kronecker)

I. Opérations sur les matrices

1°) Matrice

Déf : On appelle matrice de type (n,p) (pour n lignes et p colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout famille $A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une telle matrice est généralement représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}.$$

$a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indice (i,j) de la matrice A, il est positionné à la i ème ligne et j ème colonne de A.

On notre $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Cas particuliers :

Pour $n=p=1$: les matrices de $M_{1,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) coefficient.

Elles sont de la forme (x).

Il est usuel d'identifier ces matrices avec l'élément x de $\mathbb{K}$ qui leur correspond.

Pour n quelconque et $p=1$: les matrices de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) colonnes.

Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

Il est usuel d'identifier cette matrice colonne avec le n uplet $(a_1,\ldots,a_n)$.

Pour $n=1$ et p quelconque : les matrices de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) lignes.

Elles sont de la forme : $(a_1 \quad \cdots \quad a_p)$.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ (présentation de l'abus de notation correspondant).

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}.$$

Pour $1\leq j\leq p$, la matrice $C_j=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$ est appelée j ème colonne de A.

Pour $1\leq i\leq n$, la matrice $L_i=\begin{pmatrix}a_{i,1} & \cdots & a_{i,p}\end{pmatrix}$ est appelée i ème ligne de A.

2°) Matrice carrée

Déf : Les matrices de type (n,n) sont appelées matrices carrées d'ordre n.

On note $M_n(\mathbb{K})$, au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$, l'ensemble de ces matrices.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$.
Les coefficients d'indice (i,i) de A sont appelées coefficients diagonaux de A.
La famille $\left(a_{1,1},a_{2,2},\ldots,a_{n,n}\right)=(a_{i,i})_{1\le i\le n}$ est appelée diagonale de la matrice A.

Déf : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale ssi tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls.
On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Déf : On note $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la matrice diagonale dont la diagonale est $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ i.e. $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Déf : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) ssi tous les coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls.
On note $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Prop : $D_n(\mathbb{K})=T_n^+(\mathbb{K})\cap T_n^-(\mathbb{K})$.

3°) Espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A+B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$.

Ainsi $\begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{1,1} & \ldots & b_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}+b_{1,1} & \ldots & a_{1,p}+b_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}+b_{n,1} & \ldots & a_{n,p}+b_{n,p}\end{pmatrix}$.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
On définit la matrice $\lambda.A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\lambda.A=(\lambda a_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$.

Ainsi $\lambda.\begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{1,1} & \ldots & \lambda a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n,1} & \ldots & \lambda a_{n,p}\end{pmatrix}$.

Théorème : $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément nul $O=O_{n,p}$.

Déf : Soit $1\le k\le n$ et $1\le \ell\le p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (k,ℓ) de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $E_{k,\ell}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (k,ℓ) qui est égal à 1. Ainsi

$$E_{k,\ell}=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Théorème :
La famille $\mathcal{B}=(E_{k,\ell})_{1\le k\le n,1\le \ell\le p}$ forme une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

Cor : $\dim M_{n,p}(\mathbb{K})=np$ et en particulier
$\dim M_n(\mathbb{K})=n^2$, $\dim M_{n,1}(\mathbb{K})=n$ et $\dim M_{1,p}(\mathbb{K})=p$.

Prop : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

Prop : $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4°) Produit matriciel

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{j,k})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $C=A\times B=(c_{i,k})\in M_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall 1\le i\le n,\forall 1\le k\le q,\ c_{i,k}=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}.$$

5°) Propriétés du produit matriciel

Prop : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$.

On a $(AB)C = A(BC)$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $AI_p = A$ et $I_n A = A$

Prop : $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $(A+B)C = AC + BC$.

$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(B+C) = AB + AC$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda.A)B = \lambda.AB = A(\lambda.B)$.

6°) L'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

a) présentation

Théorème :

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, généralement non commutatif, d'élément nul $O = O_n$ et d'élément unité $I = I_n$.

De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$: $(\lambda.A)B = \lambda.(AB) = A(\lambda.B)$.

Déf : On dit que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ commutent ssi $AB = BA$.

Déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \times A, ..., A^m = A \times A \times ... \times A$ (m termes)

Théorème :

Si A et B commutent alors pour tout $m \in \mathbb{N}$: $(AB)^m = A^m B^m$, $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ et

$A^m - B^m = (A-B)\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.

Déf : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est idempotente ssi $A^2 = A$.

On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente ssi $\exists m \in \mathbb{N}, A^m = 0$.

b) matrices inversibles

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi $\exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$. On note alors $B = A^{-1}$.

Prop : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

Si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Si A est inversible alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Déf : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

Théorème d'inversibilité :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre

(i) A est inversible

(ii) A est inversible à droite i.e. $\exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = I_n$

(iii) A est inversible à gauche i.e. $\exists C \in M_n(\mathbb{K}), CA = I_n$.

De plus si tel est le cas $A^{-1} = B = C$.

c) matrices diagonales

Prop : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau commutatif de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) $\forall 1 \leq i \leq n, a_i \neq 0$.

De plus si tel est le cas : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_n \end{pmatrix}$.

d) matrices triangulaires

Prop : $T_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) Les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

De plus, si tel est le cas, $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

7°) Transposition

a) définition

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A la matrice ${}^tA = (a'_{j,i}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p, a'_{j,i} = a_{i,j}$.

Ainsi le coefficient d'indice (j,i) de ${}^tA$ est égal au coefficient d'indice (i,j) de A.

Concrètement : Pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.

$\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors ${}^tA$ l'est aussi et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

b) matrices symétriques et antisymétriques

Déf : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).

On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Prop : Les matrices de $S_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Par suite $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Les matrices de $A_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème :

$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible.

Si $A \in S_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in S_n(\mathbb{K})$.

Si $A \in A_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in A_n(\mathbb{K})$.

II. Représentation matricielle d'une application linéaire

1°) Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

Pour tout $x\in E, \exists!(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n, x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n$.

Déf : On appelle matrice des composantes de x dans $\mathcal{B}$ la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{matrix}x\\ \begin{pmatrix}\\ \vdots\\ \\ \end{pmatrix}\end{matrix}$ composantes dans $\mathcal{B}$.

Prop : L'application $x\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{F}=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $1\le j\le p$, posons $C_j=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j)$.

Déf : On appelle matrice représentative de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ la matrice A dont les colonnes sont les $C_1,C_2,\dots,C_p$. On note $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=\begin{matrix}x_1 & & x_p\\ \begin{pmatrix}\\ \vdots & & \vdots\\ \\ \end{pmatrix}\end{matrix}$ composantes dans $\mathcal{B}$.

2°) Matrice d'une application linéaire

Déf : Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n et munis de bases $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{C}=(f_1,\dots,f_n)$. Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$, on appelle matrice représentative de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1),\dots,u(e_p))\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\begin{matrix}u(e_1) & & u(e_p)\\ \begin{pmatrix}\\ \vdots & & \vdots\\ \\ \end{pmatrix}\end{matrix}$ composantes. dans $\mathcal{C}$.

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $f\in\mathcal{L}(E)$, en général on représente matriciellement f en choisissant la même base au départ et à l'arrivée. La matrice carrée d'ordre n ainsi obtenue est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

3°) Propriétés de la représentation matricielle

a) isomorphisme

Théorème :

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{C}=(f_1,\dots,f_n)$.

L'application $M:\mathcal{L}(E,F)\to M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $M(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cor : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
$\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$.

En particulier : $\dim\mathcal{L}(E)=\dim E^2$ et $\dim E^*=\dim E$.

Cor : Lorsque deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il est équivalent de se donner $u\in\mathcal{L}(E,F)$ ou de se donner $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Déf : Pour $E=\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^p$.
Pour $F=\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.

L'application $M : \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $A = M(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice canoniquement associée à u.

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $u = M^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est appelée application linéaire canoniquement associée à A.

b) image d'un vecteur

Théorème :

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F), x \in E$ et $y \in F$.

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u), X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$.

On a : $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$.

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

En Particulier : Les formes linéaires.

Si $F = \mathbb{K}$ muni de sa base canonique (1) et $f \in E^*$ alors la matrice de f est une matrice ligne L est $y = f(x) \Leftrightarrow y = LX$.

c) composition d'applications linéaires

Théorème :

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\mathcal{D} = (g_1, \ldots, g_m)$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

Cor : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \in M_n(\mathbb{K})$.

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = AB$ et $\forall m \in \mathbb{N}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^m) = A^m$.

d) représentation d'un isomorphisme

Théorème :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

On a équivalence entre :
(i) u est un isomorphisme
(ii) A est inversible.
De plus si tel est le cas $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

En Particulier : (Les automorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$f \in GL(E) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$

De plus, si tel est le cas : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

e) tableau de correspondances

E	$M_{n,1}(\mathbb{K})$
$\mathcal{L}(E,F)$	$M_{n,p}(\mathbb{K})$
$\mathcal{L}(E)$	$M_n(\mathbb{K})$
E^*	$M_{1,n}(\mathbb{K})$
u	A
$y = u(x)$	$Y = AX$

$v \circ u$	BA
u isomorphisme	A inversible
u^{-1}	A^{-1}

4°) Représentation d'un endomorphisme dans une base adaptée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Prop : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h_\lambda : E \to E$ l'homothétie vectorielle de rapport λ.

Dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

Prop : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimensions respectives r et $n-r$.
Notons p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et s la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.
Dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité de F et G :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

5°) Formule de changement de base

a) matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Déf : On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice
$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Prop : Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
On a $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$.

Prop : Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

b) nouvelles composantes d'un vecteur

Prop : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Soit $x \in E$, notons X et X' ses matrices composantes dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :
$X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$,
i.e. : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,\mathcal{B}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

c) nouvelle représentation d'une application linéaire

Prop : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.
En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q a matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ on a :
$A' = Q^{-1}AP$
Ainsi $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}\,\mathcal{C}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$.

d) nouvelle représentation d'un endomorphisme

Théorème :
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
En notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$. On a : $A' = P^{-1}AP$.
Ainsi $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,\mathcal{B}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$.

6°) Trace

a) trace d'une matrice carrée

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice A le scalaire $\text{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}$.

Prop : $\text{tr}:M_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Prop : $\forall A,B\in M_n(\mathbb{K}),\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$.

b) trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f\in\mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Notons $P=\text{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}', A=\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), A'=\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

La relation de passage permet d'écrire : $A=PA'P^{-1}$.

On a : $\text{tr}(A)=...=\text{tr}(A')$.

Par suite la trace de la matrice représentative de f est indépendante de la base choisie.

Déf : Cette quantité est appelée trace de l'endomorphisme f et est notée $\text{tr}(f)$.

Prop : L'application $\text{tr}:\mathcal{L}(E)\to\mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E.

Prop : $\forall f,g\in\mathcal{L}(E),\text{tr}(f\circ g)=\text{tr}(g\circ f)$.

III. Rang d'une matrice

1°) Définition

Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1,C_2,\ldots,C_p$ les colonnes de A. Les C_j sont des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut donc considérer le rang de la famille de vecteurs $(C_1,C_2,\ldots,C_p)$.

Déf : On appelle rang de la matrice A, noté $\text{rg}(A)$, le rang de la famille des colonnes de A, ainsi $\text{rg}(A)=\text{rg}(C_1,C_2,\ldots,C_p)$.

Prop : Soit $\mathcal{F}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ une famille de vecteurs de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$.
En notant $A=\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\ldots,x_p)$, on a $\text{rg}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\text{rg}(A)$.

Prop : Soit E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et $u\in\mathcal{L}(E,F)$.
En notant $A=\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, on a $\text{rg}(u)=\text{rg}(A)$.

2°) Propriétés du rang d'une matrice

Prop : $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\text{rg}(A)\le\min(n,p)$.

Prop : $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B\in M_{p,q}(\mathbb{K}),\text{rg}(AB)\le\min(\text{rg}(A),\text{rg}(B))$.
De plus :
Si A est une matrice carrée inversible alors $\text{rg}(AB)=\text{rg}(B)$
Si B est une matrice carrée inversible alors $\text{rg}(AB)=\text{rg}(A)$.

Théorème :
Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :
(i) A est inversible
(ii) $\text{rg}(A)=n$.

3°) Caractérisation théorique du rang

Soit $0\le r\le\min(n,p)$.

On note J_r la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $J_r=\left(\begin{array}{ccc|c}1&&0&\\&\ddots&&0\\0&&1&\\\hline&0&&0\end{array}\right)$.

Prop : $\text{rg}(J_r) = r$.

Théorème :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n,p)$.

On a équivalence entre :

(i) $\text{rg}(A) = r$

(ii) $\exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$.

Cor : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \text{rg}({}^tA) = \text{rg}\, A$.

Prop Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont on note $C_1,\ldots,C_p$ les colonnes et $L_1,\ldots,L_n$ les lignes. On a $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1,\ldots,C_p) = \text{rg}(L_1,\ldots,L_n)$.

4°) Opérations élémentaires sur les matrices

a) préliminaire

Prop : Les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ suivantes sont inversibles :

1) $C = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.

2) $D = I_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \leq n$.

3) $E = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$.

b) opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $M_n(\mathbb{K})$:

1) Soit $C = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$. $CA = A + \lambda E_{i,j}A$ est obtenue en ajoutant à la $i^{\text{ème}}$ de A λ fois sa $j^{\text{ème}}$ ligne. Cette manipulation est symbolisée : $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$.

2) Soit $D = I_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \leq n$. $DA = A - E_{i,i}A + \lambda E_{i,i}A$ est obtenue en dilatant par $\lambda \neq 0$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de A . Cette manipulation est symbolisée : $L_i \leftarrow \lambda.L_i$.

3) Soit $E = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$. $EA = A - E_{i,i}A - E_{j,j}A + E_{i,j}A + E_{j,i}A$ est obtenue en échangeant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ ligne de A . Cette opération est symbolisée par : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Déf : Ces manipulations sont appelées opérations élémentaires sur les lignes de A .

Prop : Elles conservent le rang de A .

c) opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $M_p(\mathbb{K})$.

1) Soit $C = I_p + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq p$. $AC = A + \lambda AE_{i,j}$ est la matrice obtenue par la manipulation $C_j \leftarrow C_j + \lambda.C_i$

2) Soit $D = I_p - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \leq p$. $AD = A - AE_{i,i} + \lambda AE_{i,i}$ est la matrice obtenue par la manipulation $C_i \leftarrow \lambda.C_i$

3) Soit $E = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leq i \neq j \leq p$. $AE = A - AE_{i,i} - AE_{j,j} + AE_{i,j} + AE_{j,i}$ est la matrice obtenue par la manipulation $C_i \leftrightarrow C_j$

Déf : Ces manipulations sont appelées opérations élémentaires sur les colonnes de A .

Prop : Elles conservent le rang de A .

5°) Méthode du pivot de Gauss

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On désire calculer le rang de A .

Si $A = O_{n,p}$ alors $\text{rg}(A) = 0$.

Sinon A possède un coefficient non nul $p_1 = a_{i,j}$.

Par les opérations $L_i \leftrightarrow L_1$ et $C_j \leftrightarrow C_1$ on amène le coefficient p_1 en position (1,1) et on dispose alors d'une matrice de la matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} p_1 & * \\ \hline \alpha_2 & \\ \vdots & * \\ \alpha_n & \end{array}\right)$$ avec $p_1 \neq 0$ appelé 1er pivot.

On effectue alors les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\alpha_2}{p_1} L_1, \ldots$ et on aboutit à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} p_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$ avec $p_1 \neq 0$.

On recommence ce processus avec la matrice B tant que la matrice obtenue est non nulle. A la fin, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & p_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$ avec $p_1, \ldots, p_r \neq 0$.

On peut alors conclure que $\text{rg}(A) = r$.

IV. Systèmes d'équations linéaires

1°) Positionnement du problème.

Soit $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$.

On cherche tous les p uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solutions du système :

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

Déf : Σ est appelé système d'équations linéaires à n équations et p inconnues.
On note $\mathcal{S}_\Sigma \subset \mathbb{K}^p$ l'ensemble des solutions du système Σ.

Posons $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ et $u : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p, \ldots, a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p)$
Le système Σ équivaut à $u(x) = b$.

Déf : $u(x) = b$ est appélée équation vectorielle du système Σ.

Posons $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_i) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j) \in M_{1,p}(\mathbb{K})$. Le système Σ équivaut à $AX = B$.

Déf : L'équation $AX = B$ est appelée équation matricielle du système Σ.

Déf : On appelle rang du système Σ le naturel : $\text{rg}(\Sigma) = \text{rg}\, A = \text{rg}\, u$.

2°) Compatibilité d'un système

Déf : Σ est dit compatible ssi $\mathcal{S}_\Sigma \neq \varnothing$.

Considérons $\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'équation matricielle $AX = B$.

Déf : On note $(A \mid B)$ la matrice de $M_{n,p+1}(\mathbb{K})$ constituée des colonnes de A suivies de B.

Théorème :
Le système Σ est compatible ssi $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A)$.

Cor : Tout système de rang $r = n$ est compatible.

3°) Description de l'ensemble solution

Déf : On appelle système homogène (ou sans second membre) associé à Σ le système :

$$\Sigma_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}.$$

Prop : L'ensemble solution du système Σ_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-r$ avec $r = \text{rg}(\Sigma)$.

Théorème :

Si le système Σ est compatible alors $\mathcal{S}_\Sigma$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}_{\Sigma_0}$.

4°) Résolution pratique

Considérons le système $\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'équation matricielle $AX = B$.

Par la méthode du pivot de Gauss, on peut en opérant sur les lignes et en permutant les colonnes, transformer A en $\left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & p_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$ avec $p_1, ..., p_r \neq 0$.

En suivant ce procédé, mais en opérant sur les équations au lieu des lignes et en permutant les inconnues au lieu des colonnes, on peut transformer Σ en le système équivalent Σ' suivant :

$$\begin{cases} p_1x_1' + \cdots + *x_r' + *x_{r+1}' + \ldots + *x_p' = b_1' \quad (1) \\ \qquad\qquad \cdots \\ p_rx_r' + *x_{r+1}' + \cdots + *x_p' = b_r' \quad (r) \\ 0 = b_{r+1}' \quad (r+1) \\ \qquad \cdots \\ 0 = b_n' \quad (n) \end{cases}$$

Déf : Les équations $(1)', \ldots, (r)'$ sont appelées équations principales.

Les équations $(r+1)', \ldots, (n)'$ sont appelées équations de compatibilité.

Si l'une des équations de compatibilité est fausse, le système est incompatible.

Si les équations de compatibilité sont vérifiées, le système Σ est équivalent à :

$$\begin{cases} p_1x_1' + \cdots + *x_r' = b_1' - (*x_{r+1}' + \cdots + *x_p') \\ \qquad\qquad \cdots \\ p_rx_r' = b_r' - (*x_{r+1}' + \cdots + *x_p') \end{cases}$$

Ce système triangulaire se résout en cascade et permet d'exprimer les inconnues $x_1', \ldots, x_r'$ en fonction des inconnues $x_{r+1}', \ldots, x_p'$.

Déf : Les inconnues $x_1', \ldots, x_r'$ sont appelées inconnues principales, c'est par rapport à celles-ci qu'on achève la résolution du système.

Les inconnues $x_{r+1}', \ldots, x_p'$ sont appelée inconnues paramètres, ce sont elles qui permettent la description de $\mathcal{S}_\Sigma$.

5°) Système de Cramer

Déf : On appelle système de Cramer d'ordre n tout système à n équations, n inconnues et de rang n.

Théorème :

Un système de Cramer possède une et une seule solution.